ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

o0o

HÀ LAN ANH

TÍNH LIÊN TỤC CỦA SỐ MŨ LYAPUNOV CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN KHÔNG ÔTÔNÔM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
———————o0o———————

HÀ LAN ANH

TÍNH LIÊN TỤC CỦA SỐ MŨ LYAPUNOV CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN KHÔNG ÔTÔNÔM

Chuyên ngành: Giải Tích
Mã số: 8 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TSKH. Đoàn Thái Sơn

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu khoa học độc lập của riêng bản thân tôi dưới sự hướng dẫn khoa học của **PGS. TSKH. Đoàn Thái Sơn**. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong luận văn này là trung thực và chưa từng công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây.

Ngoài ra, trong luận văn tôi có sử dụng một số kết quả của các tác giả khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc. Nếu phát hiện bất kỳ sự gian lận nào tôi xin chịu trách nhiệm về nội dung luận văn của mình.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 11 năm 2019

Tác giả

Hà Lan Anh

Lời cảm ơn

Trong quá trình học tập và nghiên cứu để hoàn thành luận văn tôi đã nhận được sự giúp đỡ nhiệt tình của người hướng dẫn, **PGS. TSKH. Đoàn Thái Sơn**.

Tôi cũng muốn gửi lời cảm ơn bộ môn Giải tích, Khoa Toán, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, hướng dẫn, phản biện để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn này. Do thời gian có hạn, bản thân tác giả còn hạn chế nên luận văn có thể có những thiếu sót. Tác giả mong muốn nhận được ý kiến phản hồi, đóng góp và xây dựng của các thầy cô, và các bạn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 11 năm 2019

Tác giả

Hà Lan Anh

Mục lục

Lời mở đầu

Lý thuyết số mũ Lyapunov có lịch sử lâu đời và được biết đến là một công cụ quan trọng trong việc nghiên cứu tính ổn định của phương trình vi phân. Cụ thể số mũ Lyapunov đo tốc độ tách nhau của các nghiệm xuất phát gần nhau của phương trình vi phân và khi số mũ là âm thì các nghiệm này hội tụ tới nhau khi thời gian tiến ra vô cùng.

Trong thực tế, có rất nhiều hệ phương trình mà ta không biết được một cách chính xác trường véc tơ và khi đó câu hỏi đặt ra là số mũ Lyapunov này sẽ thay đổi như thế nào nếu trường véc tơ của hệ thay đổi nhỏ. Từ câu hỏi này, luận văn mong muốn trình bầy một cách có hệ thống về vấn đề tình liên tục số mũ Lyapunov. Để làm được điều này, luận văn sẽ tập trung vào:

- Giới thiệu sơ lược về số mũ Lyapunov cho phương trình vi phân không ôtônôm.
- Ví dụ về tính không liên tục của số mũ Lyapunov cho phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm.
- Độc lập tuyến tính, sự liên tục của số mũ Lyapunov.

Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS. TSKH. Đoàn Thái Sơn, người thầy tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn các thầy cô giáo khoa Toán-Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu để hoàn thành luận văn này. Do điều kiện thời gian và năng lực còn hạn chế nên đề tài này không

tránh khỏi những thiếu sót, rất mong được các thầy, cô và các bạn góp ý bổ sung.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Chương 1

Số mũ đặc trưng Lyapunov trong lý thuyết hệ phương trình vi phân tuyến tính

Trong chương này, chúng ta giới thiệu số mũ đặc trưng Lyapunov và một số tính chất cơ bản.

1.1 Định nghĩa và một số tính chất của số mũ đặc trưng Lyapunov

Cho một hàm có giá trị phức $f(t)$ được xác định trên khoảng $[t_0, \infty)$.

Định nghĩa 1.1. Một số (hoặc một ký hiệu $\pm\infty$) được định nghĩa là

$$\mathcal{X}[f] = \limsup_{t\to\infty} \frac{ln|f(t)|}{t}, \tag{1.1}$$

thì được gọi là *số mũ đặc trưng Lyapunov* của hàm số $f(t)$.
Quy ước: $\mathcal{X}[0] = -\infty$. Đôi khi số mũ đặc trưng Lyapunov ta còn gọi tắt là số *mũ đặc trưng* hay *số mũ Lyapunov.*

Sau đây chúng tôi đưa ra một số ví dụ của số mũ Lyapunov của một số hàm số khác nhau.

Ví dụ 1.2. (i) $\mathcal{X}[t^m] = 0$, $\mathcal{X}[c \neq 0] = 0$, $\mathcal{X}\left[\exp\left(t\cos\frac{1}{t}\right)\right] = 1$.

(ii) $\mathcal{X}\left[\exp\left(-t\cos\frac{1}{t}\right)\right] = -1$, $\mathcal{X}[\exp(\pm t\sin t)] = 1$,

(iii) $\mathcal{X}[t^t] = \infty$, $\mathcal{X}[t^{-1}] = -\infty$.

Từ Định nghĩa trên, ta có các tính chất sau:

1. $\mathcal{X}[f] = \mathcal{X}[|f|]$,
2. $\mathcal{X}[cf] = \mathcal{X}[f], \quad c \neq 0$,
3. $\mathcal{X}[e^{\alpha t}] = \alpha$,
4. Nếu $|f(t)| \leq |F(t)|$ cho $t \geq a$, khi đó $\mathcal{X}[f] \leq \mathcal{X}[F]$.

Bổ đề tiếp theo cho ta hiểu chính xác hơn về sự tăng của một hàm số có số mũ đặc trưng hữu hạn.

Bổ đề 1.3. *Số mũ đặc trưng* $\mathcal{X}[f] = \alpha$ *hữu hạn nếu và chỉ nếu với mọi* $\varepsilon > 0$, *hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

$$1.\, \lim_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{exp(\alpha+\varepsilon)t} = 0, \tag{1.2}$$

$$2.\, \lim_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{exp(\alpha-\varepsilon)t} = \infty. \tag{1.3}$$

*Chứng minh. *Điều kiện cần:*

Giả sử

$$\mathcal{X}[f] = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln|f(t)| = \alpha. \tag{1.4}$$

Theo (1.4), cố định $\varepsilon > 0$ bất kỳ, tồn tại một $T > 0$ sao cho với $t > T$, ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{t}\ln|f(t)| < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nhân t vào hai vế rồi lấy mũ ta được,

$$|f(t)| < \exp\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)t.$$

Hơn nữa, ta có

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{\exp(\alpha+\varepsilon/2)t\exp((\varepsilon/2)t)} \leq \lim_{t\to\infty} \exp(-\varepsilon/2)t = 0.$$

Từ đó ta được (1.2).

Từ (1.4), cho một dãy $t_k \to \infty, k \to \infty$, khi đó tồn tại $n > 0$ sao cho với $k > N$ ta có

$$\ln|f(t_k)| > (\alpha - \varepsilon/2)t_k.$$

Lấy mũ hai vế ta được

$$|f(t_k)| > \exp(\alpha - \varepsilon/2)t_k.$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{|f(t_k)|}{\exp(\alpha-\varepsilon)t_k} &= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{|f(t_k)|}{\exp(\alpha-\varepsilon/2)t_k}\exp(\varepsilon/2)t_k\right)\\ &\geq \lim_{k\to\infty} \exp(\varepsilon/2)t_k = \infty.\end{aligned}$$

Từ đó ta thu được (1.3).

**Điều kiện đủ:*

Từ (1.2) cho t đủ lớn, ta có bất đẳng thức $|f(t)| < \exp(\alpha+\varepsilon)t$, ta có

$$\begin{aligned}\mathcal{X}[|f(t)|] \leq& \mathcal{X}[e^{\alpha+\epsilon}]\\ =&\alpha + \epsilon.\end{aligned}$$

Vì $\epsilon > 0$ tùy ý nên ta có, $\mathcal{X}[f] \leq \alpha$.

Bây giờ, từ (1.3) cho dãy $t_k \to \infty, k \to \infty$.. Do đó, với k đủ lớn ta có bất đẳng thức

$$|f(t_k)| > \exp(\alpha - \varepsilon)t_k.$$